

Graphische Darstellung von Fraktalen

Klaus Lichtenegger, Winfried Kernbichler

Projekt Multimediale Lehre, WS 2001/2002

1 Projektübersicht

Dieser einfache Fraktalgenerator dient zur Anzeige von Mandelbrot- und Juliamengen. Dabei soll die enge Verbindung zwischen Mandelbrot- und Juliamengen demonstriert werden, weshalb immer beide Arten von Fraktale angezeigt werden. Zugleich soll die Einbindung eines eigenen Programms in die neu entwickelte MATLAB-Benutzeroberfläche demonstriert werden.

2 Mandelbrot- und Juliamengen

Fraktale gehören zu den faszinierendsten Objekten in der Mathematik überhaupt. Ihre wahrscheinlich bekanntesten Vertreter sind die Mandelbrot- und Juliamengen, mit denen sich dieses Projekt beschäftigt. Auch wenn es nicht notwendig ist, um mit dem Fraktalgenerator umzugehen, soll an dieser Stelle doch ein wenig mathematisches Hintergrundwissen gebracht werden:

2.1 Juliamengen

Ganz allgemein ist die Julia-Menge die Menge aller komplexen Zahlen $x + iy$, deren Betrag bei einer bestimmten Iteration beschränkt bleibt. Was kann man sich darunter nun vorstellen?

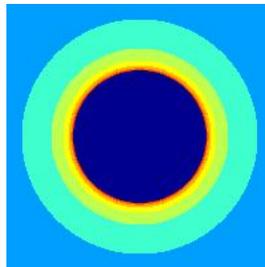
Gegeben sei etwa die Vorschrift:

$$z \rightarrow z^2$$

Durch Iteration (also wiederholtes Einsetzen) erhält man

$$z \rightarrow z^2 \rightarrow (z^2)^2 = z^4 \rightarrow (z^4)^2 = z^8 \dots$$

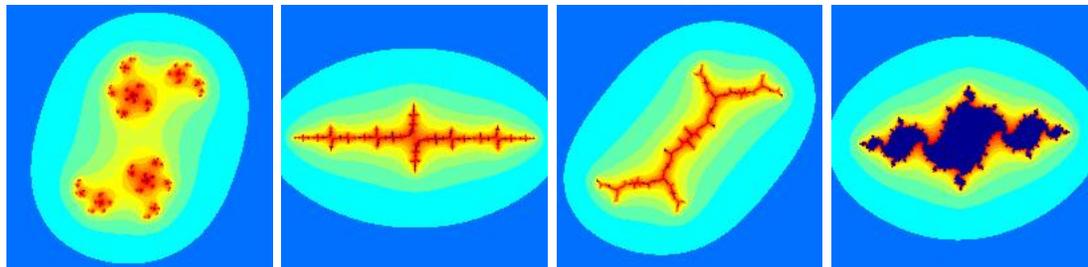
Es ist klar, daß bei fortgeführter Iteration der Betrag für jedes $z \in (\mathbb{C})$ mit $|z| > 1$ nach Unendlich strebt. Ein unter der Iteration beschränkter Betrag ist also nur innerhalb und auf dem Kreis $|z| = 1$ möglich. Die Juliamenge ist in diesem Fall einfach besagter Kreis, hier blau dargestellt. Die Farben außerhalb des Kreises geben an, wie schnell der Betrag unter der Iteration gegen Unendlich strebt.



Wesentlich interessantere Formen erhält man nun, wenn man zur Iteration

$$z \rightarrow z^2 + c \rightarrow (z^2 + c)^2 + c \rightarrow ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c \rightarrow \dots$$

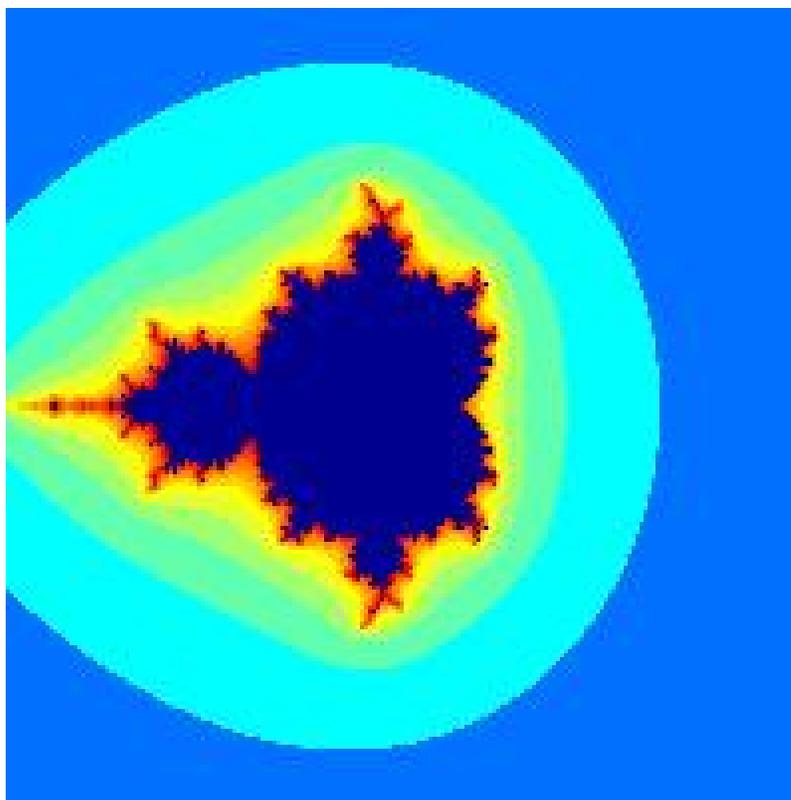
mit einem festen komplexen Parameter c übergeht. Je nach Wahl von c erhält man verschiedenste Figuren:



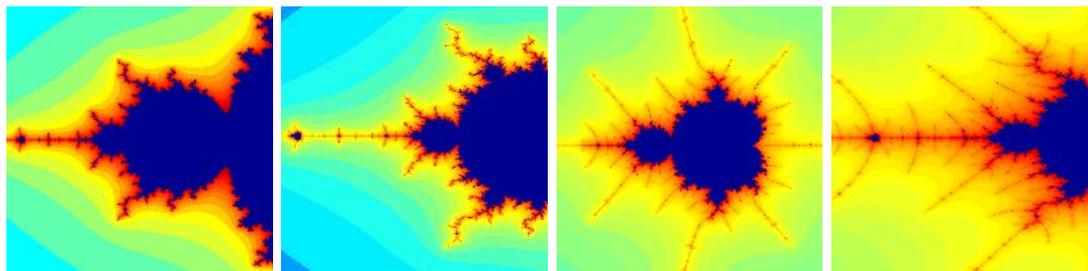
Die allermeisten dieser Julia-Mengen sind fraktal, Ausnahmen sind nur $c = 0$ und $c = -2$.

2.2 Die Mandelbrotmenge

Nun gibt es von Julia-Mengen zwei grundsätzlich verschiedene Arten: die zusammenhängenden, bei denen jede Verbindung zwischen zwei beliebigen Punkten der Menge immer aus Punkten der Menge bestehen kann, und die unzusammenhängenden. Nimmt man zum Beispiel die schon altbekannte Vorschrift $z \rightarrow z^2 + c$, so ist die Menge aller komplexen Zahlen c , für die die Julia-Menge zusammenhängend ist, wiederum eine fraktale Figur, die Mandelbrotmenge. Für die Vorschrift $z \rightarrow z^2 + c$ heißt diese Menge (aus naheliegenden Gründen) auch das Apfelmännchen:



Während es unendlich viele verschiedene Julia-Mengen gibt, ist die Mandelbrotmenge einzigartig - zumindest für die jeweilige Iterationsvorschrift. Die Selbstähnlichkeit der Mandelbrotmenge wird eindrucksvoll durch mehrfachen Zoom gezeigt:



3 Die Umsetzung in MATLAB

Die eigentliche Berechnung der Fraktale wird von den zwei kleinen Unterprogrammen `jul_draw.m` und `man_draw.m` erledigt. Diese beiden Routinen werden gewöhnlich von `fractal.m` aufgerufen. Dessen Benutzeroberfläche wurde durch Änderungen von `gol.m` erstellt. Insbesondere wurde die Anordnung der Kontroll- und Anzeigeelemente verschoben, wesentliche Änderungen ergabne sich auch in `setup_imagemat` und natürlich `start`. Manche für `gol.m` notwendige Programmteile konnten gestrichen werden, dafür wurden neue Aktionen wie zum Beispiel `change_mode` eingeführt. Im Folgenden soll die Verwendung des Programms zumindest kurz beschrieben werden:

Im MODE 1 befindet sich in der rechten oberen Ecke eine kleine Mandelbrotmenge (Äpfelmännchen), im Hauptfenster wird jeweils die aktuelle (durch die Werte Realteil und Imagteil festgelegte) Juliamenge angezeigt. Mit Iterationen läßt sich die Rechentiefe, mit Auflösung die (lineare) Auflösung des Bildes einstellen.

Die Werte `x_min`, `x_max`, `y_min` und `y_max` legen den im großen Fenster angezeigten Bildausschnitt fest. Dieser Ausschnitt kann auch mit dem Knopf ZOOM IN geändert werden, mit ZOOM OUT schaltet man auf -2 bis 2 zurück. Mit PICK & DRAW kann ein Punkt der Mandelbrotmenge ausgewählt werden, der als neuer Parameter der Juliamenge verwendet wird; mit START wird das Bild mit den aktuellen Einstellungen neu gerechnet.

MODE 2 funktioniert weitgehend umgekehrt: Hier wird die Mandelbrotmenge im Hauptfenster angezeigt, die Juliamenge im kleinen Fenster rechts oben. Nun kann man in die Mandelbrotmenge hineinzoomen und sich mittels PICK & DRAW mit einem Klick ins große Fenster für interessante Punkte die zugehörige Juliamenge im Nebenfenster anzeigen lassen.

In beiden Fällen kann das Hauptfenster jederzeit mittels SAVE PICTURE als Bild abgespeichert werden. Gültige Dateiformate (bitte als Erweiterung angeben!) sind TIF, JPG, BMP, PNG, HDF und PCX.

4 Erste Schritte

In diesem Abschnitt soll versucht werden, eine Einstiegshilfe in das Programm zu geben. Die folgenden Vorschläge sind völlig unverbindlich, sie geben aber einen kleinen Überblick über die Möglichkeiten des Fraktalgenerators. Am Anfang befindet man sich im Mode 1, im Hauptbild wird eine Juliamenge angezeigt. Nun kann man die beiden Werte Realteil und Imagteil verändern und sich mit einem Klick auf START die entsprechende Juliamenge anzeigen lassen. Alternativ dazu kann man mit PICK & DRAW einen Punkt der Mandelbrotmenge (rechts oben) auswählen und bekommt die entsprechende Juliamenge dazu angezeigt. Hat man ein besonders schönes

Exemplargefunden, kann man es natürlich jederzeit mit SAVE PICTURE abspeichern. Entweder durch Änderung der Werte `x_min`, `x_max`, `y_min` und `y_max` oder einfach mittels ZOOM IN kann man einen Ausschnitt der Menge vergrößern, bei mehrfachem Zoom sollte man die Zahl der Iterationen erhöhen, um noch gute Ergebnisse zu erzielen. Durch Klick auf MODE 1 gelangt man in den zweiten Modus. Hier bietet sich vor allem ein Zoom in die Mandelbrotmenge an. Dieser zeigt besonders schön die (allerdings eingeschränkte) Selbstähnlichkeit der Menge.

5 Dateiliste

- `fractal.m` Interaktives Programm zum Erstellen von Fraktalen
- `fractest.m` Kleines Testprogramm zur Anzeige einer Julia- und Mandelbrotmenge, kann direkt vom MATLAB-Command-Window aufgerufen werden und ist auf praktisch allen MATLAB-Versionen lauffähig
- `jul_draw.m` Algorithmus zur Erzeugung von Juliamengen mit fixem Parameter, wird von `fractal.m` oder `fractest.m` aufgerufen
- `man_draw.m` Algorithmus zur Erzeugung der Mandelbrotmenge, wird von `fractal.m` oder `fractest.m` aufgerufen
- `fractal.hlp` Textdatei mit einer kurzen Hilfe zu `fractal.m`
- Die übrigen Dateien sind nur für die graphische Oberfläche von `fractal.m` notwendig und haben mit Fraktalen an sich nichts zu tun.